Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 1

Séance 5

Dichotomie

Table des matières

I. Retour sur la dichotomie

I.1. Théorème des Valeurs Intermédiaires

L'algorithme de dichotomie peut être mis en œuvre pour résoudre les équations de type $f(x) = 0$, où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ grâce au Théorème des Valeurs Intermédiaire (TVI) :

Théorème des Valeurs Intermédiaire / Bolzano :
Soient a et b deux nombres réels, $f : [a;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u> telle que $f(a).f(b) < 0$, alors il existe $c\ \in]a; b[\ tel\ que\ f(c) = 0.$

Remarques :

- La notion de continuité est ici essentielle.
- $f(a).f(b) < 0$ permet d'avoir $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire.
- Si la fonction est strictement monotone sur : $[a;\ b]$ alors il y aura une seule et unique racine, si ce n'est pas le cas, il faudra réduire l'intervalle afin de travailler sur un intervalle où la fonction sera strictement monotone.

I.2. Algorithme de dichotomie

Si f est une fonction <u>continue</u> de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(\alpha) < 0$ et $f(\beta) > 0$ (ou l'inverse) alors, $\exists\, \gamma\ \epsilon]\alpha, \beta[, f(\gamma) = 0.$

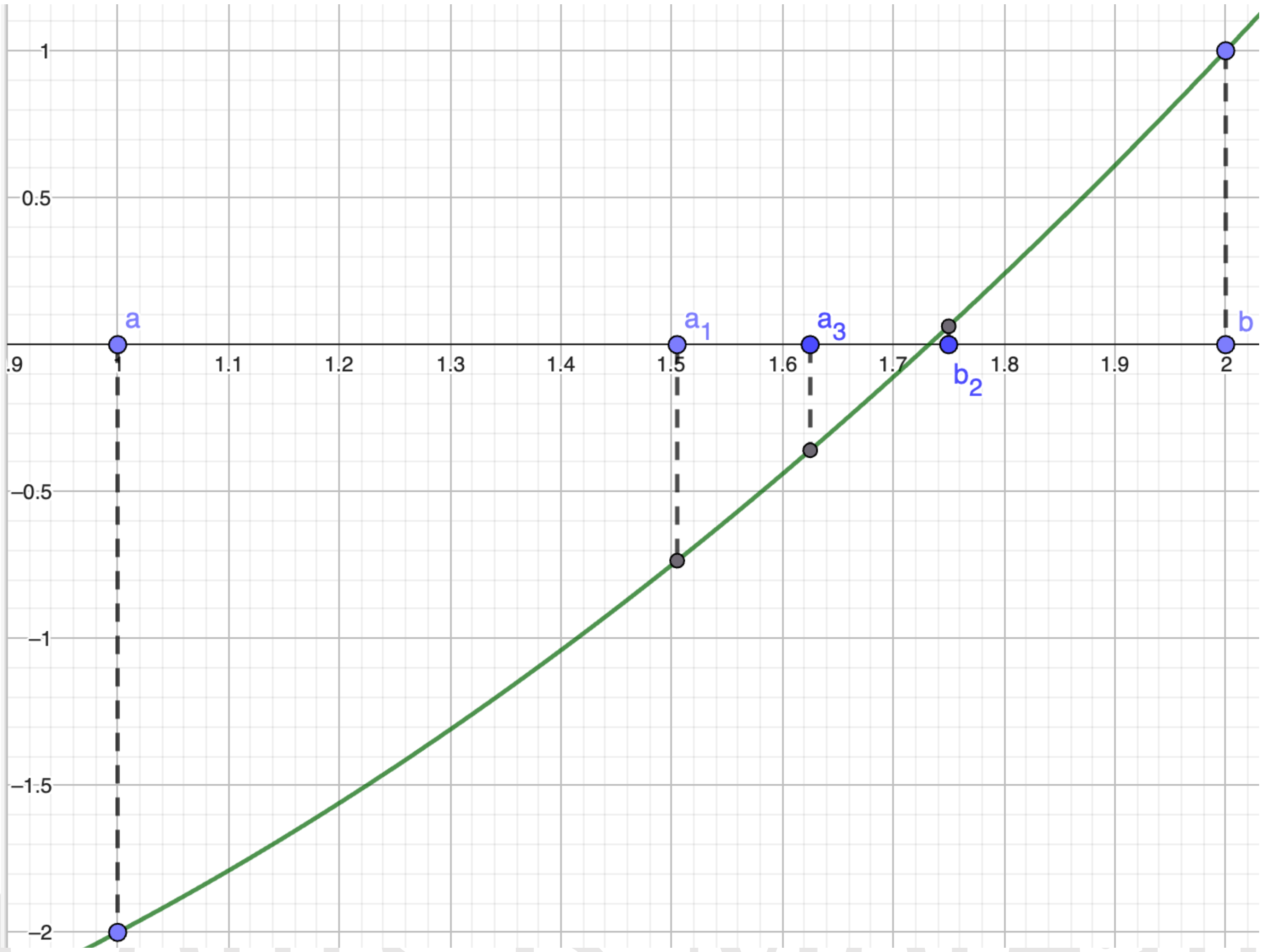
L'algorithme de dichotomie pose $\alpha_0 = \alpha$ et $\beta_0 = \beta$; puis si $[\alpha_k, \beta_k]$ est donné ($k \in \mathbb{N}$), calcule γ_k tel que $\gamma_k = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}$.
Alors :

- soit $f(\alpha).f(\gamma_k) < 0$, et le TVI indique que $\gamma \in]\alpha_k, \gamma_k[$ et on pose $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\beta_{k+1} = \gamma_k$.
- soit $f(\beta).f(\gamma_k) < 0$ et donc $\gamma \in]\gamma_k, \beta_k[$ et on pose $\alpha_{k+1} = \gamma_k$, $\beta_{k+1} = \beta_k$.
- soit $f(\gamma_k) = 0$, alors γ_k est notre racine.

Pour cette phase, nous allons utiliser un branchement ou if :

On choisit a et b tel quel $f(a).f(b) < 0$ puis :
$m = \frac{a+b}{2}$, $c\ =\ f(m)$
si $f(a).c < 0$ alors :
    a est inchangé et $b = m$
sinon :
    $a = m$ et b est inchangé
finsi

On a ainsi réduit l'intervalle de moitié.



Sur l'exemple ci-dessus, nous voyons l'étude pour trouver une approximation de $\sqrt{3}$ grâce à la méthode par dichotomie sur la fonction $x \longmapsto x^2 - 3$.
Les conditions initiales se font avec $a = 1$ et $b = 2$.
Ainsi, l'intervalle de départ est $[a, b]$, à la fin de l'étape 1, on obtient l'intervalle $[a_1, b]$, puis $[a_1, b_2]$, $[a_3, b_2]$, …

Pour le cas du calcul de la valeur approchée de $\sqrt{2}$, cela donne le pseudocode suivant :

```
a=1
b=2
fonction f(x)
    retourner x^2 - 2
fin fonction
Pour i allant de 1 à 60 faire
      m=(a+b)/2
      Si fonction(m) = 0 alors
            retourner m
      Sinon Si fonction(a)*fonction(m)<0 alors
            b = m
      sinon
            a = m
      FinSi
FinPour
```

Cet algorithme est intéressant, il tourne autant de fois que nous le voulons, mais il pourrait être plus intéressant de faire une boucle `while` qui va gérer la tolérance de notre intervalle.
On peut ainsi modifier notre algorithme comme suit :

```
a=1
b=2
t = tolerance
fonction f(x)
    retourner x^2 - 2
fin fonction
Tant que (b – a) > t
     m = (b + a)/2
     Si fonction(m) = 0 alors
          retourner m
     Sinon Si fonction(a)*fonction(m) < 0 alors
          b = m
     sinon
          a = m
     FinSi
FinTant que
```

II. TP2 Dichotomie

II.1. Calculer une valeur approchée de racine de 2 :

À la main :

Trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} à l'aide la méthode par dichotomie.

Avec Python :

Coder en Python le pseudocode vu ci-dessus afin de calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près.
Vous devrez coder une <u>fonction</u> `dichotomie` qui prendra les paramètres fonction, borne inférieur, borne supérieure et epsilon.

II.2. Application de la dichotomie à d'autres fonctions

Pour une équation de la forme $f(x) = 0$ avec $f(x) = 1 - x - x^3$ et $f(x) = -1 + 3x - x^3$, initialiser l'algorithme de dichotomie à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires et adapter le travail précédent pour calculer numériquement une (ou plusieurs) solution(s) approchée(s) de l'équation $f(x) = 0$.
Un travail à la main sur la fonction sera peut-être nécessaire…

II.3. Prise d'initiative :

Proposer une fonction afin de trouver une approximation de π à 10^{-6} près.

Le point Python :

Pour définir une fonction sous python, vous avez deux possibilités.

Par exemple pour la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

Méthode 1	Méthode 2
`def f(x):` `    return x**2`	`f = lambda x: x**2`